

HAVRAN DÁNIEL–KONCZ GÁBOR

Hitelbedőlések együttes modellezése: számít-e a korreláció?¹

A banki háztartási és nem pénzügyi vállalati hitelportfólió-állományának minősége együtt mozog (különösen válság idején), azonban ezt az együttmozgást sokszor figyelmen kívül hagyják a mikro- és makromegközelítésű elemzésekben. A tanulmányban azt vizsgáljuk, hogy érdemes-e figyelembe venni a bedőlési valószínűségek (*probability of default*) együttmozgását. Csödintenzitás-alapú modellekkel többféle korrelációs struktúra mellett (Gauss, Gumbel és Frank-kopula) szimuláljuk a hitelportfóliók bedőlési rátáját és a forward csődvalószínűségeket, amelyekre standard kockázati mértékeket (VaR, expected shortfall – ES) számolunk.

1. BEVEZETÉS

A pénzügyi válsághoz kapcsolható jelenség Magyarországon, hogy a banki hitelportfóliók minősége romlott. A késedelmes fizetések és a nemfizetések aránya az elmúlt időszakban jelentősen emelkedett, ezzel párhuzamosan a várható csődráták – a bedőlési valószínűségek (*probability of default*) – is nőttek. Az MNB (Balás [2009]) stabilitási jelentéséből kiderül, hogy a 90 napon túli késedelmes fizetések aránya a nem pénzügyi vállalatok tartozásainál körülbelül 7 százalékra, a háztartási portfóliónál mintegy 6 százalékra emelkedett a 3 százalék körüli szintről. A 90 napon felüli késedelmes fizetések már gyakorlatilag hitelvesztiséget jelentenek.²

Az 1. ábra szemlélteti a magyarországi bankrendszerben szereplő hitelek késedelmes fizetéseinek állománydinamikáját. Az itt megfigyelhető hitelportfólió-romlás a korábbi gyakorlathoz képest a bankoktól nagyobb mértékű tartalékolást is megkíván. Fontos azonban megjegyezni, hogy más a mikroszintű és más a makroszintű kockázat jellege. Míg mikroszinten az egyes bankok saját hitelportfóliójukra a szabályozásnak megfelelő tartalékok képeznek, addig makroszinten – az egyes bankok és szektorok együttmozgásának okán – a hitelvesztések kockázata nagyobb lehet, mint amekkorát a várható veszteségek összege alapján számítanánk. A portfóliószemléletű hitelkockázati modellek ezt a kockázatot képesek számszerűsíteni, bár nem aggregált számításokra, hanem az egyedi banki kockázatok mérésére használatosak. A legelterjedtebb megközelítések, mint a Credit Risk+ (Credit Suisse [1997]), a CreditMetrics vagy a CreditPortfolioView, figyelembe veszik a csődráták

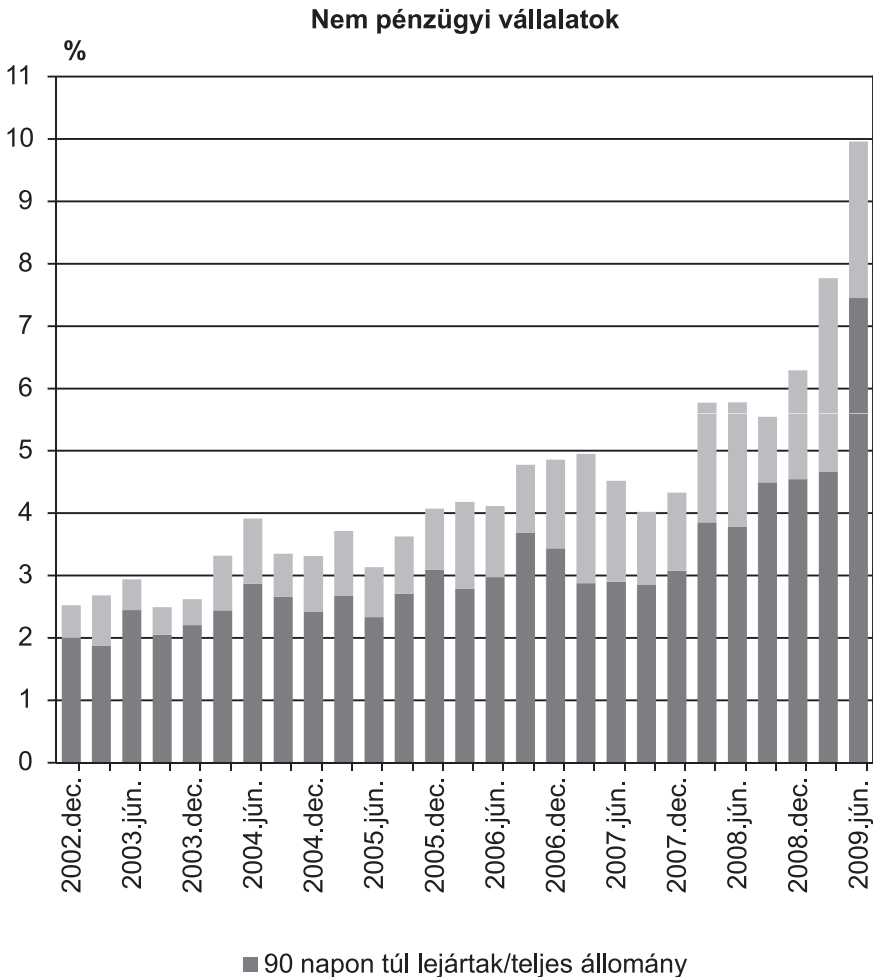
¹ Köszönettel tartozunk Király Júliának, aki a cikk egy kezdetleges változatához adott értékes megjegyzéseket és tanácsokat. A cikkben található esetleges hibákért kizárólag a szerzők felelősek.

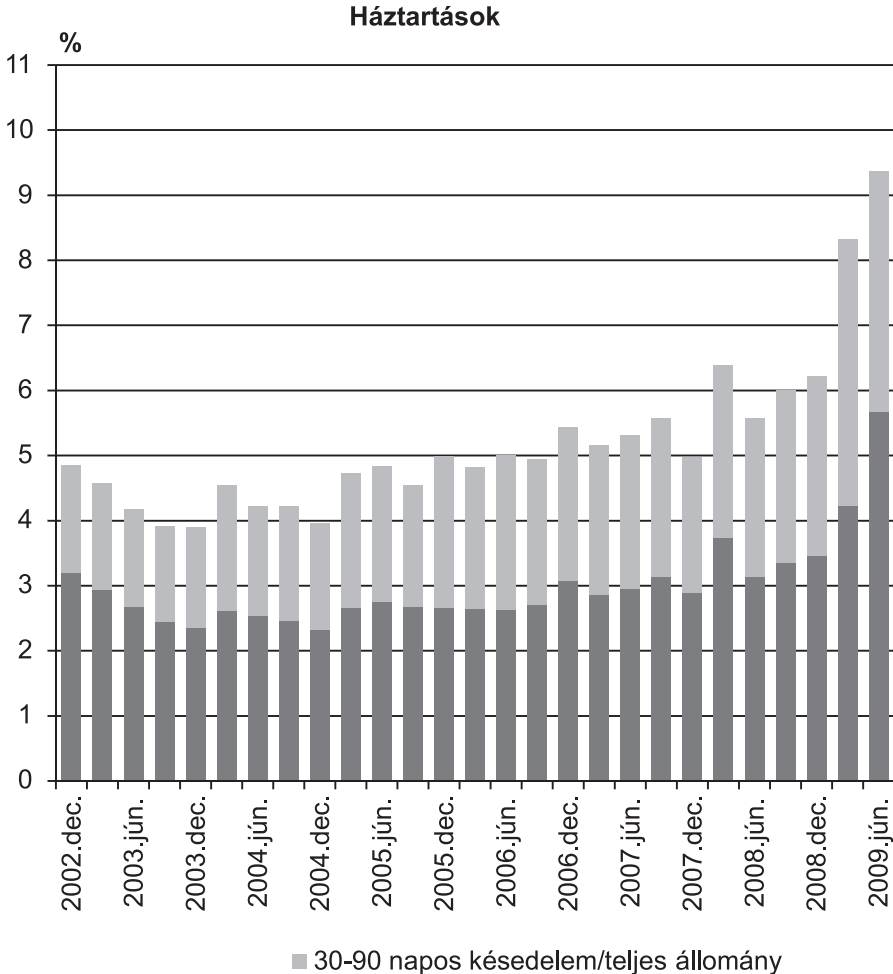
² A 90 napos késedelmek aránya csak egy a bankrendszer hitelportfóliójának minőségét jellemző mutatók közül, a mutatók összehasonlítását BALÁS [2009] végzi el.

közötti együttmozgást. Ahogy *Janecskó* [2002] is felhívja rá a figyelmet, a hitelkockázati események együttmozgása valójában a nemteljesítési valószínűségek együttmozgását jelenti. A jelenlegi pénzügy válság következménye az is, hogy a vállalati és a háztartási szektorban megemelkedtek a defaultráta-értékek, ezzel párhuzamosan a késedelmes fizetések és nemteljesítések is. Bár példának a késedelmes fizetési és nemfizetési ráták múltba tekintő idősorát hoztuk, a tanulmányban az előretekintő nemteljesítési valószínűséggel foglalkozunk. (A két fogalom különbségéről és a csódráta becslésének problémáiról részletesen lásd *Madar* [2008]).

1. ábra

A bankrendszer késedelmesen teljesítő hiteleinek aránya a teljes állományhoz képest





Forrás: Balás [2009], 2. o.

Jelen tanulmányban egy gondolatkísérletet végzünk el arra vonatkozóan, hogy miként alakulhat két hitelportfólió-állomány együttesének kockázata, ha a két hitelportfólió közötti korrelációt többféle módon is figyelembe vesszük. Ha a két hitelportfólió-állomány közötti időszaki bedőlési arányok nagysága együtt mozog, krízis esetén az együttes veszteség is nagyobb. A két hitelportfólió-állományt a gondolatkísérlet során nem nevesítjük, azonban úgy gondolunk rájuk, mint a vállalati és a háztartási hitelportfóliók állományaira. Ennek az oka, hogy a két állomány között lényeges korreláció van, azonban az egyedi kockázati hatások is jellemzőek, s ezzel a tulajdonsággal egy homogén elemekből álló, kételemű portfólió nem jellemezhető. Mivel az aggregált csődrátákat pontosan nem ismerjük, így pontos számításokat a két szektor közötti kapcsolat vizsgálatára nem végzünk. A tanulmányban kizárólag a defaultráták közgazdasági modellezésével foglalkozunk, nem vesszük

figyelembe a visszaszerzési ráta (*recovery rate*) és a biztosítékok értékének lehetséges alakulását, valamint a defaultráttával való korrelációját sem, hanem egyszerűen százalékos veszteséget tételezünk fel. A veszteség méretével sem foglalkozunk külön. Mivel modellünk a defaultráta együttmozgására koncentrálna, az ilyen folyamatokat adottnak tekintjük, tehát – a stresszteszttekkel ellentétben – jelen esetben nem komplex makrogazdasági faktorokkal magyarázzuk a defaultfolyamatok alakulását, hanem egy redukált modell segítségével.

A cikk további részében az alapfogalmak és a kapcsolódó modellezési gyakorlat bemutatása után röviden leírjuk, miként modellezhetők a nemteljesítési ráták csődintenzitás-folyamatok segítségével, és hogyan jelenhet meg a korreláció a mulasztások között. Nemteljesítési valószínűségeket (*probability of default – PD*), forward nemteljesítési valószínűségeket³ (*forward probability of default*), valamint együttes nemteljesítési valószínűségeket szimuláció segítségével számolunk, majd ezek után ismertetjük főbb eredményeinket. Aggregált szinten a korreláció figyelembevétele valóban számít, azonban komoly trade-offot találunk a csődráták átlaghoz visszahúzó modellje és a korrelációmodellezés együttes alkalmazásában. A csődvalószínűség-folyamatok generálására gyakorta használt, átlaghoz való visszahúzási folyamatok (mint a Cox–Ingersoll–Ross-modell, vagy az általában használt lognormális intenzitások átlaghoz visszahúzó modellje) a korreláció-eloszlásokat „összehúzzák”, éppen a szélsőségek vesznek el. A másik divatos irányzat – a korreláció és a kopulamodellezés – pedig a szélsőségekre és a vastag szélekre koncentrálna, így nem ragadja meg azt a jelenséget, hogy hosszú távon a defaultráta egy „egyensúlyi érték” (*feltétel nélküli, átlagos PD*) közelében alakulnak. Érdemes lehet tehát kétféle modellt fejleszteni: a stabil időszakokra az átlaghoz való visszahúzó modell javasolt, míg lehetséges válság-, illetve stresszhelyzetek idején a kopulamódszerek jellemezhetik jobban a lehetséges kockázatokat.

2. A KORRELÁCIÓ SZEREPE A HITELKOCKÁZAT MODELLEZÉSÉBEN

A portfóliószemléletű hitelkockázati modellezést magyar nyelven Janecskó [2002] tanulmánya mutatja be. A CreditRisk+ által használt eloszlások és folyamatok matematikai alapjairól magyar nyelven Medvegyev [2009] anyagaiban olvashatunk. Az angol nyelvű szakirodalmi publikációk és könyvek közül ki kell emelni Wilson [1997a], [1997b], Crouchy–Galai–Mark [2001], Duffie és Singleton [2003], Schönbucher [2003], Lando [2004], valamint McNeil–Frey–Embrechts [2005] munkáit.

A Bázel II-es szabályozásban a különböző típusú kockázati eseményekre általában tökéletes korrelációt feltételeznek, azonban sem a standard, sem a belső módszer nem tekint a hitelkockázati események korrelációját (Basel Committee On... [2003]). A szabályozás mögött azonban mégis egy korrelációs megfontolás áll – írja Janecskó [2004]. A modellben megkülönböztetik a szisztematikus kockázatot (egy makrofaktor van, amelyet konjunkturnyenzőnek is hívhatunk), valamint az egyedi, idioszinkratikus kockázatot. A szisztematikus kockázat lényegében a nemteljesítési valószínűségek együttmozgásából (a makrofaktorra egyszerre történő reagálásából) fakad. A valóságban az egyedi kockázatok

3 A fogalom pontos tartalmát a későbbiekben megadjuk.

nem diverzifikálhatók, emiatt az egyedi kockázatok hatását is figyelembe kell venni. Különösen igaz lehet ez a lakossági és a vállalati hitelportfóliók közötti kapcsolatra.

A stressztesztokban ritkán jelenik meg a korrelációs modellezés. A különféle kockázatok számszerűsítésére és az egyes bankok kockázattűrő képességének értékelésére használt stressztesztok általában az ún. „top-down” megközelítést alkalmazzák (az MNB stressztesztjének eredményéről lásd MNB [2009] 42–43. o.), azaz a makrokörnyezet és az adósok nemteljesítése között teremtenek kapcsolatot, és szélsőséges makroszcenáriók esetén vizsgálják a bankrendszer ellenálló képességét a nagyarányú hitelbedőlésekkel szemben. Az egyes szektoroknak (háztartások, nem pénzügyi vállalatok) és a szektorokon belül a különféle kategóriák szerint nyújtott hitelek portfóliójának kockázatát külön-külön mérik, majd a kapott eredményeket összegzik. A hitelportfóliók együttmozgását a nemzetközi gyakorlatban is sokszor indoklás nélkül figyelmen kívül hagyják.

3. A NEMTELJESÍTÉSI VALÓSZÍNŰSÉG ÉS A DEFAULTRÁTÁK ELOSZLÁSA

Hitelkockázat alatt azt a lehetséges veszteséget értjük, amelyet a partner nemteljesítése esetén a másik fél elszenvedhet. A várható veszteséget (*expected loss* – *EL*) az eloszlás ismeretében számíthatjuk ki, a nemteljesítés valószínűségének (*probability of default* – *PD*), a nemteljesítés esetén bekövetkező veszteségnek (*loss given default* – *LGD*) és a kitétségeknek (*exposure at default* – *EAD*) a szorzataként:

$$EL = PD \cdot LGD \cdot EAD \quad (1)$$

A képlet számszerűsítésével a hitelintézetek felkészülhetnek várható veszteségeikre. Nagyobb problémát jelenthet a nem várt veszteség (*unexpected loss* – *UL*), amelynek a becsléséhez a nemteljesítés teljes valószínűség-eloszlása szükséges. Tegyük fel például, hogy a vállalati és a lakossági hitelek veszteségrátája (*LGD*), valamint a kitétségek (*EAD*) ismertek. (Az *LGD* modellezéséről magyar nyelven lásd *Paulovics* [2005].) Ekkor elegendő a nemteljesítési valószínűséget (*PD*) modellezni a veszteségeloszlás (*loss*) generálásához.

A nemteljesítési valószínűségeket a szimuláció során úgy kapjuk, hogy a lehetséges nemteljesítési eseményeket előállítva, a defaultok arányának nagymintás átlagát számítjuk. A veszteségeloszlás alatt a lehetséges defaultráták eloszlását értjük.

4. INTENZITÁSALAPÚ MODELLEK

A nemteljesítések modellezéséhez az intenzitásalapú csődmodelleket hívjuk segítségül (a témához kapcsolódó kurzust tartott 2008-ban *Armai Zsolt* és *Ostoróczy Tünde* az MNB-ben *Klein* és *Moeschberger* [2003] alapján, bővebben lásd még *Duffie* és *Singleton* [2003]). Ilyenkor a vizsgált portfólióállományban lévő elemek (hitelek) egy időszaki túlélését, megmaradását modellezzük. Túlélési rátának (túlélési valószínűségnek, *probability of surviving*) nevezzük és $p(t)$ -vel jelöljük a t -ik időpontig nem bedőlő (túlélő) hitelek arányát.

A feltételes valószínűségre vonatkozó összefüggés (Bayes-szabály) alapján

$$p(t|s) = \frac{p(t)}{p(s)} \quad (2)$$

kiszámításával az adott időintervallumra vonatkozó túlélési rátákat kapjuk meg. A bedőlési valószínűség (*probability of default*), valamint forward csődvalószínűség fogalmát a túlélési rátákból származtathatjuk. A csődvalószínűség a t időpontig csődbe jutó hitelek arányát (illetve valószínűségét) jelenti:

$$PD(t) = 1 - p(t), \quad (3)$$

a forward nemteljesítési valószínűség pedig egy adott $[s, t]$ intervallumon lezajló nemteljesítési események valószínűségét jelöli az s időpontban meglévő és teljesítő hitelállományra:

$$PD(t) = 1 - p(t), \quad (4)$$

A nemteljesítési valószínűséget mint az állományban várható, bedőlő hitelek számának vagy értékének várható arányát értelmezzük. A gyakorlatban a intenzitást (*default intensity*) modellezzük. Az intenzitást a következőképpen szokták származtatni:

Legyen $p(t)$ folytonosan deriválható függvény, ekkor az $f(t)$ csődintenzitás alakja

$$f(t) = -\frac{p'(t)}{p(t)}, \quad (5)$$

amelyből a túlélési ráták könnyen visszakaphatók:

$$p(t) = e^{-\int_0^t f(u) du}. \quad (6)$$

A csődintenzitást diszkrét modellekben λ -val jelölik. Ezek alapján a csődráta várható értéke, vagyis a bedőlési valószínűség

$$PD(t) = 1 - p(t) = E(1 - e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_t)}) \quad (7)$$

módon származtatható, a forward nemteljesítési valószínűséget pedig

$$fPD(t) = 1 - \frac{p(t)}{p(s)} = E(1 - e^{-(\lambda_s + \dots + \lambda_t)}) \quad (8)$$

alján kapjuk meg.

A forward nemteljesítési valószínűség matematikai modellezése a forward kamatlábakéhoz hasonlít. Amint a fenti képletből is látszik, a PD a csődintenzitások alapján számított várható érték, várható bedőlési ráta. A későbbiekben a bedőlési ráta valószínűség-eloszlására is szükségünk lesz a várható értéken kívül. Ekkor a várhatóérték-operátor elhagyásával a realizációkra fókuszálunk.

5. KORRELÁLT LOGNORMÁLIS CSŐDINTENZITÁSOK MODELLEZÉSE

Célunk a λ csődintenzitás időbeli modellezése. A legtöbb dinamikus modell a hozamgörbe-modellezés területéről ismert, ismerhető. Ilyen az átlaghoz visszahúzó modellek vagy a CIR (Cox–Ingersoll–Ross-modell). Mi azt a módot választjuk, amikor a csődintenzitás logaritmusá átlaghoz visszahúzó (*mean-reverting*) folyamatot követ (l. Duffie és Singleton [2003], 236. o.):

$$\log \lambda_{i,t+1} - \log \lambda_{i,t} = \psi_i (\log \bar{\lambda} - \log \lambda_{i,t}) + \sigma_i \varepsilon_{i,t+1}, \quad (9)$$

ahol az i az egyes modellezni kívánt eszköz indexe ($i=1, 2$), ε pedig független, standard normális eloszlású véletlen változó.

A következőkben néhány jellegzetes, a szakirodalom által ajánlott korrelációs mintázattal generáljuk a λ paramétereket. A független esetet, a Gauss-, a Gumbel- és a Frank-kopula esetét vizsgáljuk. A korreláció általánosításának tekinthető kopulákat több, egymással valamilyen függőségi struktúrában lévő valószínűségi változók közös eloszlásainak generálására használják.

A Gauss-kopulával két korrelált normális eloszlású valószínűségi változó együttes eloszlását lehet előállítani.

A Gumbel- és a Frank-kopula az úgynevezett archimédeszi kopulaosztályba tartozik. Az archimédeszi kopulák az extrém értékek együttlátmozgását jól modellezik, a Gumbel családra a felső extremitásokban való összefüggés a jellemző, így ennek használata tulajdonképpen azt az előfeltevést testesíti meg, hogy a két szektor esetében a nagyarányú nemteljesítések általában egyszerre fordulnak elő.

A Frank családot pedig szimmetrikusan a felső és az alsó extremitások összefüggése jellemzi. Ma már a számítógépes szoftvercsomagokban a fenti kopulák generálása egy beépített paranccsal történik, amelyek a fenti lépéseket tartalmazzák. További ismertetést ad a kopulák alkalmazására magyar nyelven *Benedek–Kóbor–Pataki* [2002], *Kóbor* [2003], *Kovács* [2005] és *Barra* [2007] dolgozata, *Tulassay* [2008] előadásvázlata, illetve angolul *McNeil–Frey–Embrechts* [2005] kvantitatív kockázatkezelésről szóló könyve.

5.1. Független esetek

Ha a két hitelportfólió független egymástól, akkor a két intenzitásfolyamatot külön modellezzük:

$$\log \lambda_{1,t+1} - \log \lambda_{1,t} = \psi_1 (\log \bar{\lambda}_1 - \log \lambda_{1,t}) + \sigma_1 \varepsilon_{1,t+1} \quad (10)$$

$$\log \lambda_{2,t+1} - \log \lambda_{2,t} = \psi_2 (\log \bar{\lambda}_2 - \log \lambda_{2,t}) + \sigma_2 \varepsilon_{2,t+1}, \quad (11)$$

ahol ε_1 és ε_2 független, normális eloszlású valószínűségi változók. A realizációk generálása után a T időpontra vonatkozó PD -ket és az fPD -ket, valamint az eloszlásokat állítjuk elő.

5.2. Gauss-kopula

Ha a két hitelportfólió korrelál egymással, akkor a (10) és (11) egyenletpárban az ε_1 és ε_2 korrelált normális eloszlású valószínűségi változók. A Gauss-kopula alakja:

$$C(u, v) = P(N(X) \leq u, N(Y) \leq v), \quad (12)$$

ahol X és Y standard normális eloszlású változók, ρ korrelációval.

5.3. Gumbel-kopula

A Gumbel-kopula az előzőhöz képest eltérő korrelációs szerkezetet ír le. A kopulafüggvény alakja:

$$C(u, v) = e^{-\left[-(\ln u)^\delta - (\ln v)^\delta\right]^{1/\delta}}, \quad (13)$$

ahol u és v a két összefüggő változó (jelen esetben az ε_1 és az ε_2), C pedig a közös eloszlásfüggvény értéke.

5.4. Frank-kopula

A Frank-kopula alakja:

$$C(u, v) = \frac{1}{\alpha} \log \left(1 + \frac{(e^{\alpha u} - 1)(e^{\alpha v} - 1)}{e^\alpha - 1} \right), \quad (14)$$

ahol u és v szintén a két összefüggő változó.

6. KÉTELEMŰ HITELPORTFÓLIÓK SZIMULÁLT VESZTESÉGELOSZLÁSA

A kételemű (x_1 és x_2 állományból álló) hitelportfólió alakulását 12 periódusra (hónapra) szimuláljuk. A várható veszteségeket ($i=1, 2$ -re) az

$$y_i(t) = PD_i(t) x_i(0) = [1 - p(t)] x_i(0) \quad (15)$$

képlet adja meg. Ekkor az $Y(t)$ együttes veszteségek várható értéke az

$$E[Y(t)] = E[y_1(t)] + E[y_2(t)] \quad (16)$$

alakot ölti. A veszteségeloszlásokat pedig

$$Y(t) = \left(1 - e^{-[\lambda_{1,t_1} + \lambda_{1,t_2} + \dots + \lambda_{1,t_n}]}\right) x_1(0) + \left(1 - e^{-[\lambda_{2,t_1} + \lambda_{2,t_2} + \dots + \lambda_{2,t_n}]}\right) x_2(0) \quad (17)$$

módon kapjuk.

Eltérő korrelációs nagyság mellett több korrelációs struktúrát is vizsgálunk. A paramétereket úgy választottuk, hogy a megfigyelt tényekhez közeliek legyenek, elérhető adatbázis hiányában nem becstültük modellünket.

1. táblázat

Paraméterek összefoglaló táblázata

	1.	2.
$\bar{\lambda}$	0,0034	0,0043
σ	0,4000	0,4000
x	50	50

A szimulációt $T=12$ periódusra (12 hónap), $N=10\ 000$ futtatás mellett végeztük el. Az induló x_1 és x_2 hitelállományok értéke tehát 50-50 Ft, vagyis a kételemű portfólió kiinduló értéke 100 Ft, erre vetítjük a szimuláció során a veszteségek eloszlást.

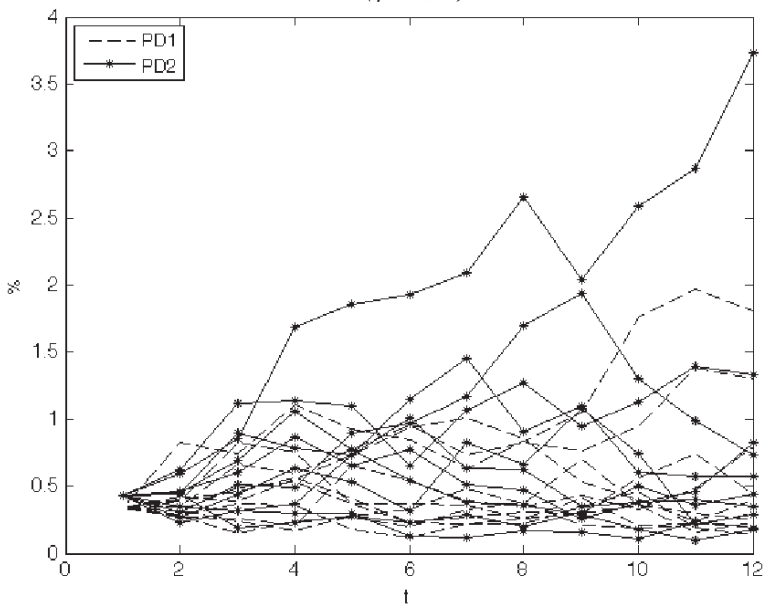
6.1. Átlaghoz való visszahúzás versus kopulamodellezés

A modellben két tényező játszik szerepet a kockázatoság meghatározásában. Az átlaghoz való visszahúzást jelentő paraméter a *forward PD*-k eloszlását elemenként összehúzza, valamint az együttes eloszlást is, míg a különböző korrelációk modellezése az együttes eloszlás szélét vastagítja meg. Véleményünk szerint stabil időszakban a magasabb átlaghoz való visszahúzási paraméter írja le jól a nemteljesítési valószínűségek (PD-k) viselkedését, míg válság idején a PD-eket alacsony visszahúzási paraméter mellett érdemes számolni. A kopuláknak is ebben az esetben van igazi jelentőségük.

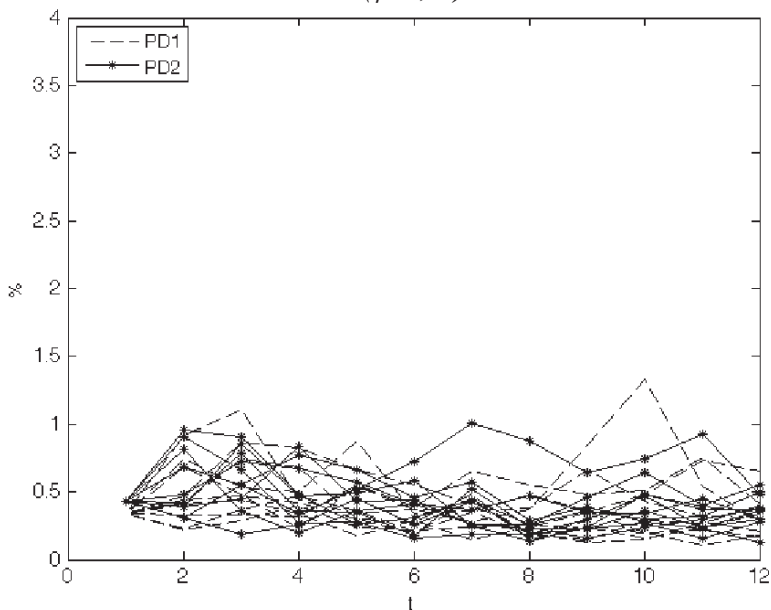
A 2. ábra illusztrálja a visszahúzó tag szerepének jelentőségét. A nemteljesítési arányok (PD) időbeli alakulását szimuláltuk (Gauss-kopula szerinti függőségi struktúrával, $\rho=0,5$) kis és közepes visszahúzási paraméter mellett, majd ábrázoltunk 10-10 realizációt és a várható értéküket. Az ábrán jól látható, hogy kis visszahúzási paraméter esetén a hosszú távú egyensúlyi szinttől hajlamos a nemteljesítési arány pozitív irányba elszakadni, és így a várható értéke is nő, ha az előrevetített időtávot növeljük. Ha a visszahúzási paramétert megnöveljük, az a defaultintenzitás folyamatában – (9) egyenlet – a második (sztochasztikus) tag relatív súlyát csökkenti, ezáltal kisebb eséllyel fog extrém nemteljesítési valószínűség-értékeket visszaadni.

A két korrelált nemteljesítési valószínűség realizációi,
illetve a nemteljesítési arányok várható értékének alakulása az időben

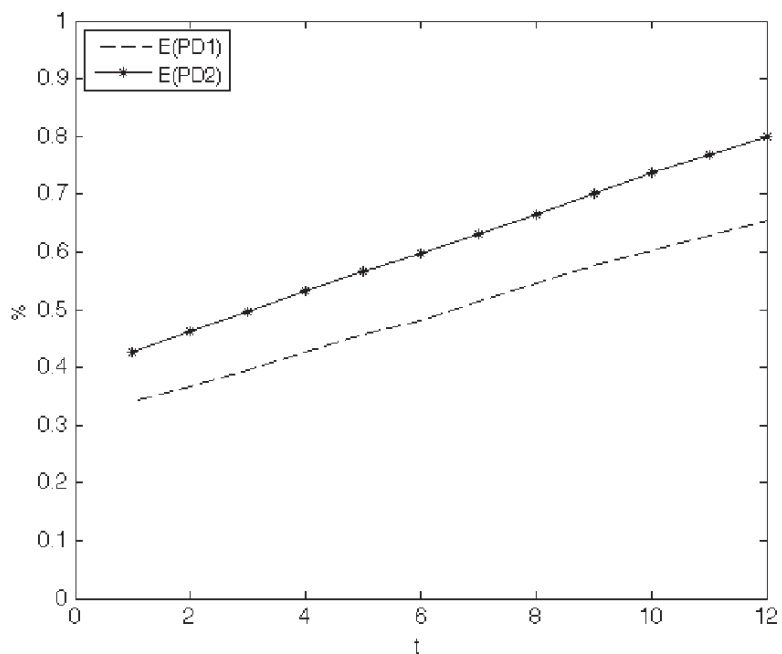
a) Realizációk kis visszahúzási paraméter mellett
($\psi=0,01$)



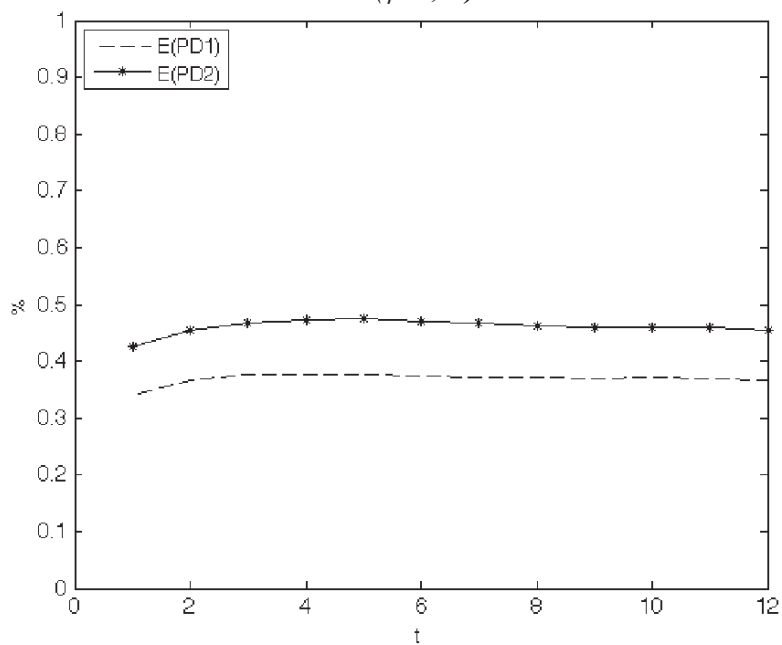
b) Realizációk közepes visszahúzási paraméter mellett
($\psi=0,40$)



c) PD kis visszahúzási paraméter mellett
($\psi=0,01$)



d) PD közepes visszahúzási paraméter mellett
($\psi=0,40$)

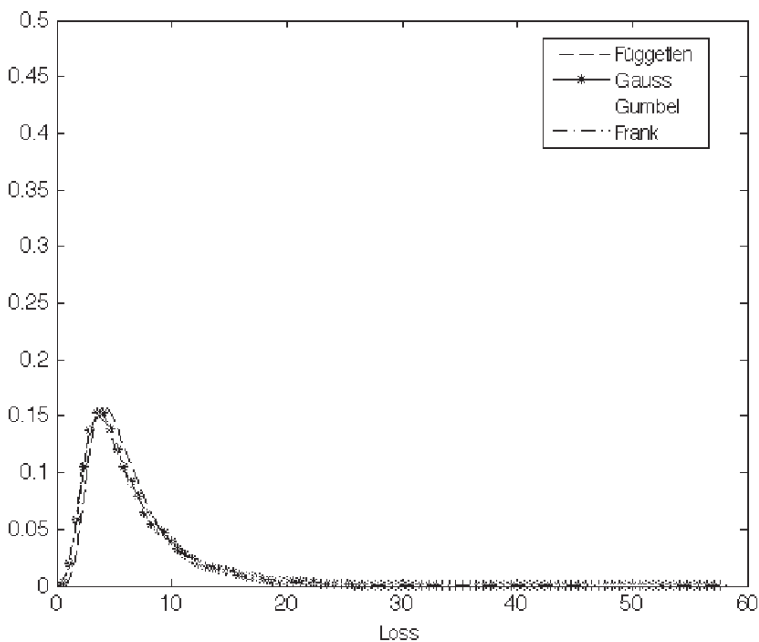


Monte–Carlo-szimulációval megvizsgáltuk ($N=10\,000$ -es futtatásszám mellett), hogy $T=12$ periódus végére (azaz T -ben) hogyan alakul a veszteségeloszlás alakja, 100%-os veszteségrátát feltételezve. Az eredményeinket a 3. ábra és a 2. táblázat tartalmazza. A Gauss-kopula esetén a lineáris korrelációs együttható értéke 0,5 volt, a Gumbel- és Frank-kopulákat pedig a lineáris korreláció szerinti mértékkel egyenértékű paraméterrel láttuk el.

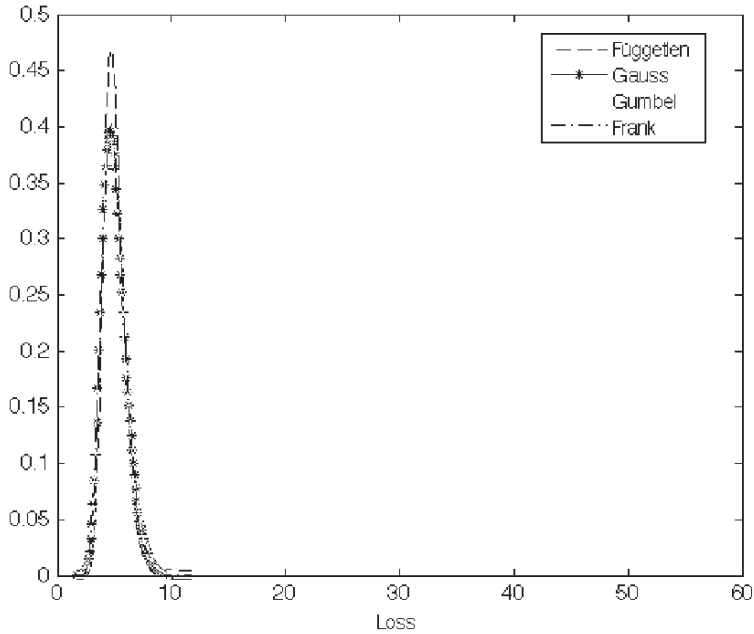
3. ábra

PD eloszlása kis és közepes visszahúzási paraméter mellett

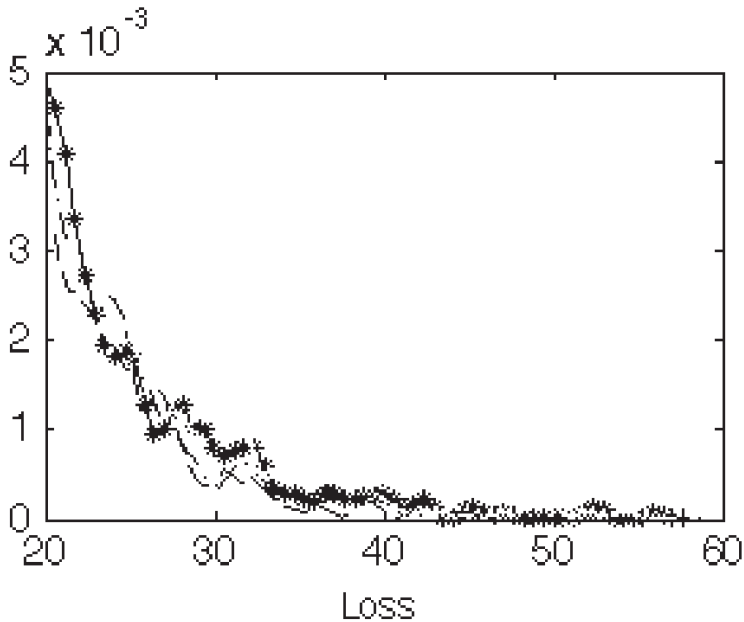
a) PD eloszlása kis visszahúzási paraméter mellett ($\psi=0,01$)



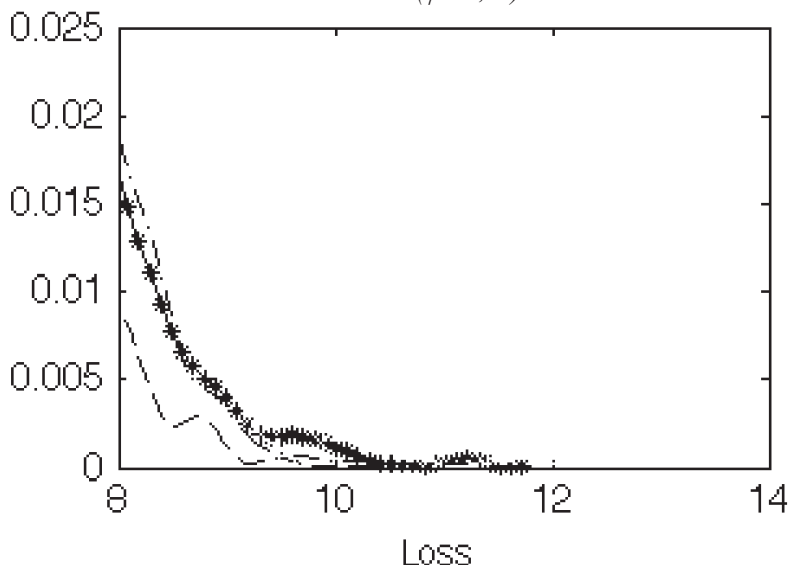
b) PD eloszlása közepes visszahúzási paraméter mellett
($\psi = 0,40$)



c) Az eloszlás széle kis visszahúzási paraméter mellett
($\psi = 0,01$)



d) Az eloszlása széle közepes visszahúzási paraméter mellett
($\psi = 0,40$)



A 3. ábra a) és b) részén – bár a négy függőségi struktúra grafikonja nagymértékben fedi egymást – látható, hogy a visszahúzási paraméter növelésével az eloszlás kevésbé lesz ferde. A c) és d) ábrarészénél pedig az is kitűnik, hogy a független esetenél az eloszlás széle kevésbé vastag, mint bármely kopula esetén.

Az ábrák szembetűnőbb eredményeit a 2. táblázatban mutatjuk be. A táblázatban a 100 Ft-os kiinduló kételemű hitelporfölióra számított 12 havi várható értékeket és kockázati mértékeket ismertetjük. Először tekintsük a két visszahúzási paraméter esetén kapott eredmények különbözőségét! Visszakaptuk azt az előre is sejthető eredményt, amely szerint míg a várható értékek a paraméter változtatásával nem változnak sokat, a percentilisek akár két-háromszorosukra nőnek, ha csökkentjük a visszahúzás mértékét.

2. táblázat

**Számított kockázati mértékek
kis és közepes visszahúzó paraméter mellett⁴**

	$\Psi=0,01$				$\Psi=0,40$			
	Független	Gauss	Gumbel	Frank	Független	Gauss	Gumbel	Frank
E[Y]	6,76	6,74	6,72	6,67	4,99	5,00	4,99	5,00
VaR₉₅	14,89	16,15	16,36	15,94	6,59	6,94	7,01	6,90
VaR₉₉	22,39	25,63	27,70	24,62	7,51	8,05	8,20	8,04
ES₉₅	19,55	22,16	23,11	21,45	7,16	7,65	7,77	7,59
ES₉₉	27,35	32,44	34,99	31,01	8,05	8,74	8,97	8,57

Egy-egy visszahúzási paraméter esetén pedig a függőségi struktúrák közötti különbség is szembetűnő, ha az eloszlásokat jellemző mutatószámokat tekintjük. A várható érték a függőségi struktúra változtatásával szinte alig változik – ez az a része a hitelkockázatnak, amelyre a kamatszpredek útján készülnek a bankok –, ám a VaR-értékek már nagyobb különbséget mutatnak, amelynek az a jelentősége, hogy erre kell a bankoknak tőketartalékkal készülniük. A Gumbel-kopula esetén – amelyre a felső extremitásokban való összefüggés jellemző – alacsony visszahúzási paraméternél a 99. percentilishez tartozó VaR 5,31 százalékponttal nő a független esethez képest.

3. táblázat

**A korrelációs struktúra változásának hatásai
a független esethez képest**

	$\Psi=0,01$				$\Psi=0,40$			
	Független	Gauss	Gumbel	Frank	Független	Gauss	Gumbel	Frank
E[Y]	1,000	0,997	0,994	0,987	1,000	1,002	1,000	1,002
VaR₉₅	1,000	1,085	1,099	1,071	1,000	1,053	1,064	1,047
VaR₉₉	1,000	1,145	1,237	1,100	1,000	1,072	1,092	1,071
ES₉₅	1,000	1,134	1,182	1,097	1,000	1,068	1,085	1,060
ES₉₉	1,000	1,186	1,279	1,134	1,000	1,086	1,114	1,065

⁴ A táblázatban található értékek a hitelezési veszteséget mutatják a kezdetben 50-50 értékű (azaz összesen 100 értékű) hitelportfóliókból. Tehát például 0,01-es visszahúzási paraméter esetén, Gauss-kopula szerinti függőségi struktúrát feltételezve, 1% a valószínűsége annak, hogy a kezdetben 100 értékű állomány 25,63-mal csökkenjen hitelbedőlés miatt.

A korrelációs és a visszahúzási paraméterek hatását vizsgáljuk a 3. és 4. táblázat segítségével. A 3. táblázat azt mutatja, hogy alacsony és közepes visszahúzási paraméter mellett (és rögzített, 0,5-es korreláció esetén) a független esethez képest hányszorosára nőnek az eloszlásokat jellemző mutatók. A független esetet 1-re (100%) normáltuk, majd ehhez viszonyítottuk a Gauss-, Gumbel- és Frank-kopulákkal végzett számítások eredményét. Például a Gumbel-kopula esetén alacsony visszahúzási paraméternél a 99. percentilishez tartozó VaR 23,7%-kal nagyobb a független esethez képest. A Gumbel-kopula modellezte legintenzívebben a szélsőségekben az együttmozgás hatását.

A 4. táblázatban a 0,40-es visszahúzási paramétert normáltuk, majd ezzel hasonlítottuk össze az alacsony visszahúzási paraméter hatásait. Így például a Gumbel-kopula esetén a 99. percentilishez tartozó VaR 337,8%-kal nő, ha a visszahúzási paramétert 0,4-ről 0,01-re csökkentjük.

4. táblázat

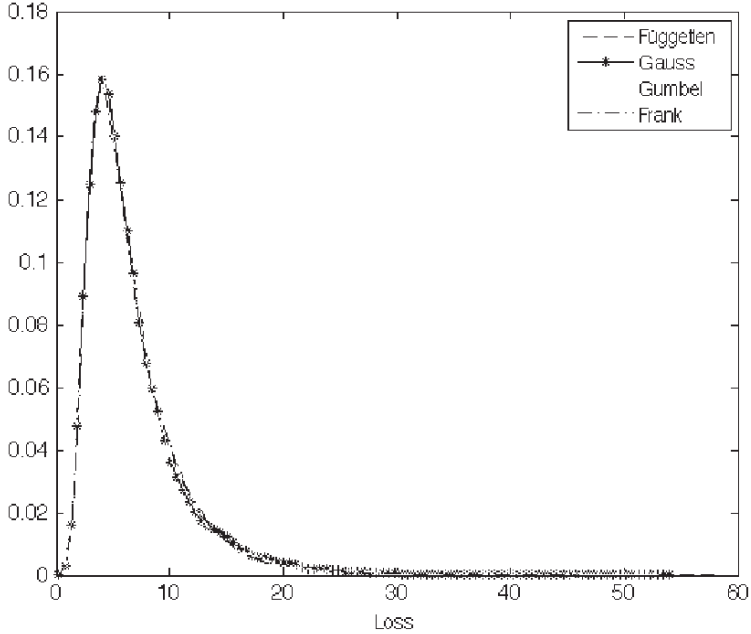
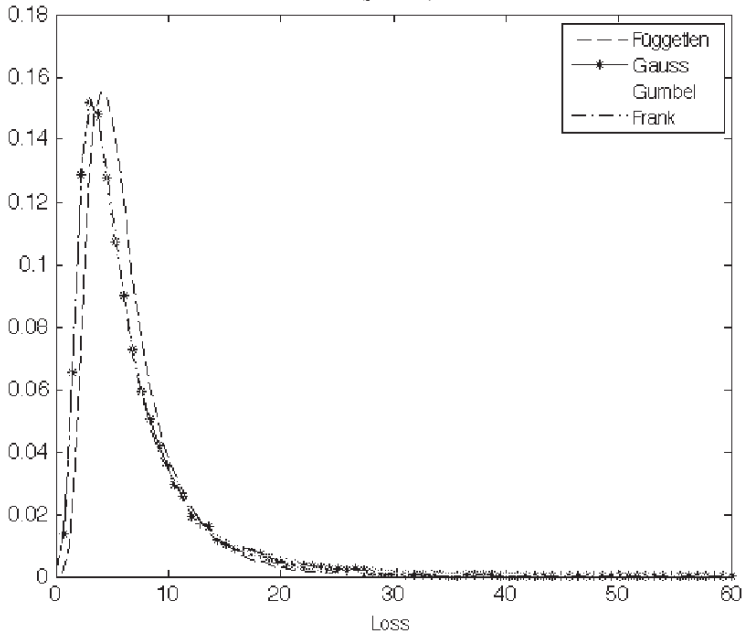
**A visszahúzási paraméter változásának hatása
a 0,40-es paraméterezéshez képest**

	$\Psi=0,01$				$\Psi=0,40$			
	Független	Gauss	Gumbel	Frank	Független	Gauss	Gumbel	Frank
E[Y]	1,355	1,348	1,347	1,334	1,000	1,000	1,000	1,000
VaR₉₅	2,259	2,327	2,334	2,310	1,000	1,000	1,000	1,000
VaR₉₉	2,981	3,184	3,378	3,062	1,000	1,000	1,000	1,000
ES₉₅	2,730	2,897	2,974	2,826	1,000	1,000	1,000	1,000
ES₉₉	3,398	3,712	3,901	3,618	1,000	1,000	1,000	1,000

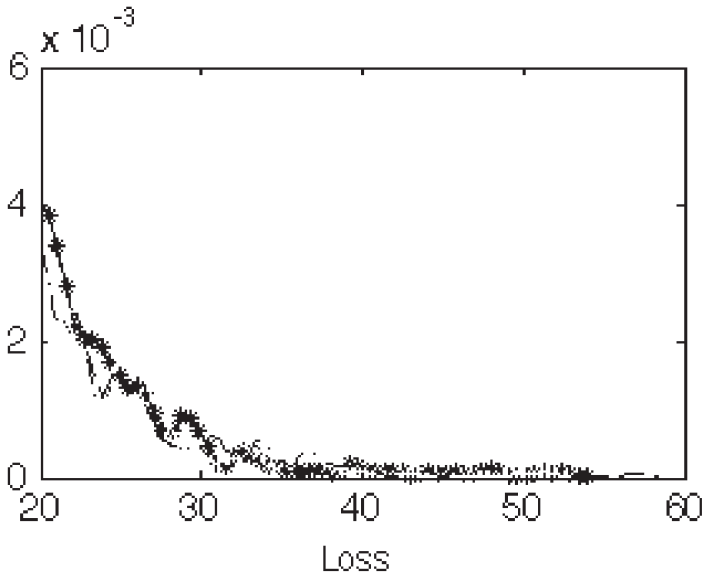
6.2. Mikor játszik szerepet a csődráták eloszlásában a korreláció?

A csődráták szimulációja során a kapott eloszlásokra vagyunk kíváncsiak. Az egyedi (illetve, itt egy szektorra vonatkozó) csődráták eloszlása a lognormális. Az együttes eloszlás két korrelált lognormális eloszlású valószínűségi változó összegéből származik. A szektorok közötti korrelációt gyakran szakértői becsléssel adják meg, Janecskó [2002] 0,7-es korrelációt javasol, jelen tanulmányban 0,1, 0,5 és 0,9-es korrelációs együtthatók mellett vizsgáljuk az együttes eloszlás alakulását. Annak érdekében, hogy a korrelációs szerkezetnek legyen relevanciája, a következőkben az alacsony (0,01-es) visszahúzási paramétert alkalmazzuk.

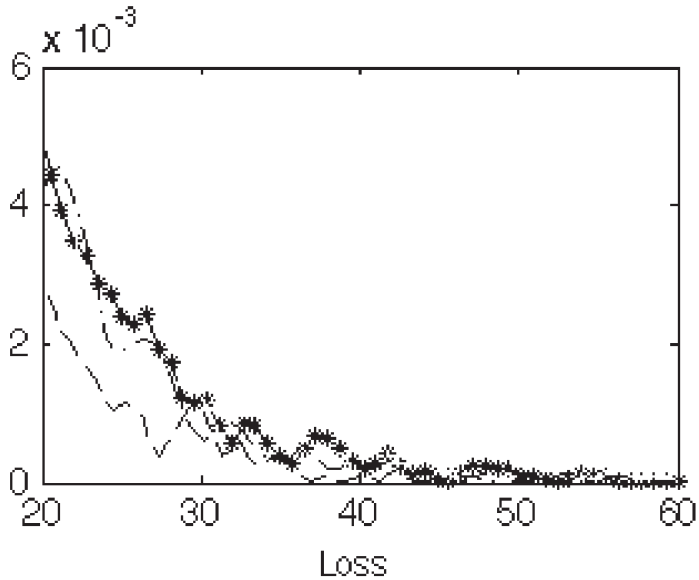
4. ábra

PD eloszlása alacsony és magas korrelációs együttható mellett**a) PD eloszlása alacsony korrelációs együttható mellett
($\rho=0,1$)****b) PD eloszlása magas korrelációegyüttható mellett
($\rho=0,9$)**

c) Az eloszlás széle alacsony korrelációs együttható mellett
($\rho=0,1$)



d) Az eloszlása széle magas korrelációegyüttható mellett
($\rho=0,9$)



A 3. ábra a) és c) részén bemutatjuk a 0,5-es korreláció mellett kapott eredményeket; a 0,1 és 0,9-es korreláció esetén a 4. ábra mutatja az eloszlások alakját. A teljes eloszlást tekintve, itt is nagymértékben fedik egymást a grafikonok, bár az látható, hogy a korreláció növelésével kis-mértékben eltávolodnak egymástól. Itt még inkább látszik az eloszlások szélének ábrázolásánál, hogy a korreláció növelésével mindhárom kopula esetén az eloszlás eltávolodik a független esettől.

Az 5. táblázat az eloszlásokat leíró mutatók változását számszerűsíti, az összehasonlítást pedig a 6. és 7. táblázat segítségével végeztük el.

5. táblázat

A korreláció mértéke és az együttes portfólió kockázata

		Független	Gauss	Gumbel	Frank
$\rho=0,1$	VaR₉₅	14,89	15,35	14,91	14,90
	VaR₉₉	22,39	23,70	23,28	23,26
	ES₉₅	19,55	20,62	19,85	20,05
	ES₉₉	27,35	29,50	28,70	28,95
$\rho=0,5$	VaR₉₅	14,89	16,15	16,36	15,94
	VaR₉₉	22,39	25,63	27,70	24,62
	ES₉₅	19,55	22,16	23,11	21,45
	ES₉₉	27,35	32,44	34,99	31,01
$\rho=0,9$	VaR₉₅	14,89	17,65	17,47	17,22
	VaR₉₉	22,39	29,39	30,45	27,60
	ES₉₅	19,55	25,40	25,58	24,18
	ES₉₉	27,35	39,05	40,69	36,68

A 6. táblázat tulajdonképpen a 3. táblázat kiegészítése a 0,1-es és 0,9-es korreláció esetével (a kevésbé releváns várható érték kivételével). Itt is megfigyelhető, hogy adott lineáris korrelációs együttható esetén a függőségi struktúra változtatásával a független esethez képest megnövekednek a kockázati mutatók. Látható, hogy a 0,1-es korreláció ugyan nagyon alacsony, a 99. perceniliszhez tartozó VaR már ekkor is sokat nő – mindössze azért, mert a függőségi struktúrát változtatjuk. A 0,9-es korreláció feltevésével viszont még nagyobb változáson megy keresztül az eloszlás: Gumbel-kopula esetén a 99-es VaR 36%-kal nő, az ES pedig 48,8%-kal.

A korrelációs struktúra változásának hatása

		Független	Gauss	Gumbel	Frank
$\rho=0,1$	VaR₉₅	1,000	1,031	1,001	1,001
	VaR₉₉	1,000	1,059	1,040	1,039
	ES₉₅	1,000	1,055	1,015	1,026
	ES₉₉	1,000	1,079	1,049	1,059
$\rho=0,5$	VaR₉₅	1,000	1,085	1,099	1,071
	VaR₉₉	1,000	1,145	1,237	1,100
	ES₉₅	1,000	1,134	1,182	1,097
	ES₉₉	1,000	1,186	1,279	1,134
$\rho=0,9$	VaR₉₅	1,000	1,185	1,173	1,156
	VaR₉₉	1,000	1,313	1,360	1,233
	ES₉₅	1,000	1,299	1,308	1,237
	ES₉₉	1,000	1,428	1,488	1,341

7. táblázat

**A lineáris korreláció változásának hatása
adott függőségi struktúra mellett**

		Független	Gauss	Gumbel	Frank
$\rho=0,1$	VaR₉₅	1,000	1,000	1,000	1,000
	VaR₉₉	1,000	1,000	1,000	1,000
	ES₉₅	1,000	1,000	1,000	1,000
	ES₉₉	1,000	1,000	1,000	1,000
$\rho=0,5$	VaR₉₅	1,000	1,052	1,097	1,070
	VaR₉₉	1,000	1,081	1,190	1,058
	ES₉₅	1,000	1,075	1,164	1,070
	ES₉₉	1,000	1,100	1,219	1,071
$\rho=0,9$	VaR₉₅	1,000	1,150	1,172	1,156
	VaR₉₉	1,000	1,240	1,308	1,187
	ES₉₅	1,000	1,232	1,289	1,206
	ES₉₉	1,000	1,324	1,418	1,267

A 7. táblázat pedig azt mutatja meg, hogy adott függőségi struktúra esetén csupán a lineáris korrelációs együttható növelése (illetve a Gumbel- és Frank-kopula paraméterének az ennek megfelelő változtatása) hányszorosára növeli az eloszlásokat leíró mutatókat. Míg természetesen a független eseten nem változtat a korreláció növelése, a többi esetben igen érzékenyen reagálnak (pl. a Gumbel-kopula esetén a 99-es percentilis 30,8%-kal nő, ha a paraméterét úgy változtatjuk, ami a lineáris korreláció 0,1-ről 0,9-re növelésének megfelel). Ez felhívja a figyelmet arra, hogy ha a hitelkockázat modellezéshez ezt a megközelítést használjuk, akkor a visszahúzási paraméter és a függőségi szerkezet kiválasztása mellett a megfelelő korrelációs együttható megadása is fontos feladat.

7. ÖSSZEGRZÉS

A tanulmányban a hitelállomány-romlások közötti korreláció szerepét vizsgáltuk egy redukált hitelkockázati modell segítségével. A redukált modellekkel a gyakorlatban a kamatláb és a csődintenzitás közötti, valamint a csődintenzitás és a visszaszerzési ráta közötti korrelációt modellezik. Mi azt vizsgáltuk, hogy két, egymással szorosan összefüggő hitelportfólió

együttes kockázatát hogyan befolyásolja az eltérő korrelációs szerkezet. A Bázeli II.-es szabályozás mögött álló modell azt tételezi fel, hogy egy közös makrofaktor határozza meg a különálló hitelállományok kockázatát, ezen kívül vannak még egyedi kockázatok, amelyek ha diverzifikálhatók, eltűnik a közös kockázat; amennyiben nem, akkor ezt is számszerűsíteni és mérni kell.

Modellünkben két különálló hitelállományt vizsgáltunk, amelyek nem egy közös makrofaktortól, hanem elsősorban egymástól függetlenek, a korreláció azonban nem teljes, hanem 1-nél kevesebb. Az intenzitáson alapuló modellek azon jellegzetessége, hogy egy hosszú távú átlaghoz (feltétel nélküli PD) visszahúznak, jelentős trade-off elé állítja a hitelkockázatot modellezőket. Az átlaghoz való visszahúzási folyamatok ugyanis elveszik a korreláció „élet”, a kopulamodellezés erejét. Átlaghoz való visszahúzással inkább hosszú távra, kopulákkal inkább rövid távra (1 évre) érdemes modellezni.

IRODALOMJEGYZÉK

- BALÁS TAMÁS [2009]: A bankrendszer hitelportfóliójának minőségét leíró mutatók összehasonlítása, in: Jelentés a pénzügyi stabilitásról (2009. november), háttér tanulmány, Budapest
- BARRA ISTVÁN [2007]: Kopulák alkalmazása a többváltozós extrémérték-elméletben. TDK dolgozat, BCE, Budapest
- Basel Committee on... [2003]: The New Basel Capital Accord. 3rd Consultative Document, Basel Committee on Banking Supervision. Bank for International Settlements, Bazel
- BENEDEK GÁBOR–KÓBOR ÁDÁM–PATAKI ATTILA [2002]: A kapcsolatszorosság mérése m -dimenziós kopulákkal és értékpapírportfólió-alkalmazások. *Közgazdasági Szemle*, XLIX. évf. február, 105–125. o.
- Credit Suisse [1997]: Credit Risk+, A Credit Risk Management Framework. Credit Suisse First Boston International
- DUFFIE, DARREL–SINGLETON, KENNETH J. [2003]: Credit Risk – Pricing Measurement and Management, Princeton Series in Finance
- JANECSKÓ BALÁZS [2002]: Portfóliószemléletű hitelkockázat szimulációs meghatározása. *Közgazdasági Szemle* XLIX. évf. július–augusztus, 664–676. o.
- JANECSKÓ BALÁZS [2004]: A Bázeli II. belső minősítésen alapuló módszerének közgazdasági-matematikai háttere és a granularitási korrekció elmélete. *Közgazdasági Szemle*, LI. évf. március, 218–234. o.
- KÓBOR ÁDÁM [2003]: A piaci kockázatmérési eszközök alkalmazási lehetőségei a pénzügyi stabilitás elemzésében, PhD-értekezés, Budapesti Corvinus Egyetem
- MNB [2008]: Jelentés a pénzügyi stabilitásról, Magyar Nemzeti Bank
- MNB [2009]: Jelentés a pénzügyi stabilitásról (időközi felülvizsgálat), Magyar Nemzeti Bank, 2009. november
- KIRÁLY JÚLIA–NAGY MÁRTON [2008]: Jelzálogpiacok válságban: kockázatalapú verseny és tanulságok. *Hitelintézet Szemle*, VII. évf. 5. sz.
- KLEIN, JOHN P.–MOESCHBERGER, MELVIN L. [2003]: Survival Analysis. Techniques for Censored and Truncated Data, 2nd Edition, Springer.
- KONCZ GÁBOR [2009]: Hitelkockázati stressztesztelés alkalmazása a magyar bankrendszerre. TDK-dolgozat, Budapesti Corvinus Egyetem
- KOVÁCS EDITH [2005]: Speciális többváltozós eloszlások modellezése kopulák segítségével. In: G. MÁRKUS GYÖRGY (ed.): Új Európa, 105–114. o.
- LANDO, DAVID [2004]: Credit risk modeling: Theory and Applications. Princeton Series in Finance
- MADAR LÁSZLÓ [2008]: A defaultráta, a nemteljesítési valószínűség és a szabályozás egyéb követelményei. *Hitelintézet Szemle*, VII. évf. 1. sz..
- MCNEIL, ALEXANDER J.–FREY, RÜDIGER–EMBRECHTS, PAUL [2005]: Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools. Princeton University Press

- MEDVEGYEV PÉTER [2009]: Összetett eloszlások kiszámolása, a CreditRisk+ modell (kézirat, egyetemi jegyzet).
Budapesti Corvinus Egyetem
- SZABADOSNÉ NÉMETH ZSUZSANNA–DÁVID LÁSZLÓ [2005]: A kis- és középvállalati szegmens mulasztási valószínűségének előrejelzése magyarországi környezetben. *Hitelintézeti Szemle*, IV. évf. 3. sz.
- PAULOVICS OTTÓ [2005]: LGD-modellezés elméletben és gyakorlatban. *Hitelintézeti Szemle*, IV. évf. 5–6. sz., 63–83.o.
- TULASSAY ZSOLT [2008]: A hozamok többváltozós modellezése. Előadás a Budapesti Corvinus Egyetemen, 2008. december 9.
- WILLMOTT, PAUL [2000]: Paul Willmott on Quantitative Finance. John Wiley and Sons
- WILSON, T. C. [1997a]: Portfolio Credit Risk (I). Risk, szeptember. (Reprinted in Credit Risk Models and Management. 2004, 2nd edition, edited by DAVID SHIMKO, Risk Books).
- WILSON, T. C. [1997b] Portfolio Credit Risk (II). Risk, October. (Reprinted in Credit Risk Models and Management. 2004, 2nd edition, edited by DAVID SHIMKO, Risk Books).