PETRIMÁN ZITA–TULASSAY ZSOLT

BEPILLANTÁS AZ ARCH MODELLEK VILÁGÁBA*

Jelen tanulmányban áttekintést adunk az ARCH modellek alapvető jellemzőiről, továbbá felvillantjuk, hogy miként használhatjuk fel az eredetileg a volatilitásra megfogalmazott modellek alapötletét az alsóági kockázat kiszámításánál. A tárgyalás során bemutatjuk azokat az empirikus jelenségeket, amelyek az ARCH modellek megjelenését és elterjedését ösztönözték. A tanulmány aktualitását az adja, hogy március végén hazánkban járt és a Collegium Budapestben tartott előadást Robert Engle, az ARCH modellcsalád Nobel-díjas megalkotója.

A HOZAMOK VISELKEDÉSE

A kutatókat régóta foglalkoztatja az a kérdés, hogy miként modellezhető a pénzügyi eszközök árának mozgása. A különböző termékek hozamainak vizsgálatakor azt tapasztalták, hogy az empirikus eloszlás a normális eloszlásnál *csúcsosabb* (vastag szélű) – azaz jóval gyakrabban következnek be szélsőséges események, mint ami a normális eloszlásból adódna. Azt is észrevették, hogy a hozam volatilitása *időben tömörül:* vannak olyan időszakok, amikor tartósan viszonylag kicsi volatilitás jellemzi a piacot (az árfolyamok alig változnak); míg amikor a piac felbolydul (nagy árfolyamváltozások után), jellemzően magasabb volatilitású periódus következik. Ezt a jelenséget nevezik *„volatility clustering”*-nek.

A volatilitás tömörülését tükrözi az az észrevétel is, miszerint számos esetben a hozam modellezésekor kapott reziduumok autokorrelálatlannak bizonyultak, a reziduumok négyzete azonban már szignifikáns autokorrelációt mutatott. Ez utóbbi megfigyelésre alapozva alkotta meg Robert Engle [4] 1982-ben a legelső **ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity – autoregresszív feltételes heteroszkedaszticitás) modellt,** amely képes volt a fenti empirikus jelenségeket (az autokorrelált reziduumnégyzeteket, az eloszlások csúcsosságát és a volatilitás tömörülését) egyszerre reprodukálni. Ezért a munkájáért (a hivatalos indoklás szerint az időben változó volatilitású gazdasági idősorok elemzésének módszereiért) Engle 2003-ban megosztott közgazdasági Nobel-díjat kapott.

* Letorálta: Darvas Zsolt, Budapesti Corvinus Egyetem, Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemző Tanszék, adjunktus.

Egy egyszerű ARCH modell

Egy ARCH modellt úgy tudunk felírni, hogy az ökonometriai modellben nem az eltérésváltozót tekintjük független azonos eloszlású (FAE) véletlen hatásoknak, hanem „mögéjük képzelünk” η_t FAE valószínűségi változókat. Az h_t-ket pedig valamilyen, időben változó η_t varianciával szorozva kapjuk meg az ε_t eltérésváltozót. A legegyszerűbb esetben:

$$y_t = c + \varepsilon_t \tag{1}$$

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t} \tag{2}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \tag{3}$$

Az (1) egyenlet a modellezendő y változó várható értékének modellje. Az ebben szereplő ε eltérésváltozót a (2) egyenlet adja meg, ahol az η_t-k FAE valószínűségi változók, nulla várható értékkel és egységnyi szórással.[1] A (2) egyenletből látható, hogy a hozamra ható sokkok (az ε_t-k) továbbra is függetlenek, de már nem lesznek azonos eloszlásúak: noha mindegyikük várható értéke 0, de a feltételes varianciájuk h_t lesz, és ez időben változik:

$$Var_{t-1}(\varepsilon_t) = E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = E_{t-1}(\eta_t^2 h_t) = h_t \tag{4}$$

A (3) egyenletből az is kiolvasható, hogy ha az előző napi ε_{t-1} hiba viszonylag nagy volt, akkor az megnöveli a mai ε_t hiba (feltételes) varianciáját. Vegyük észre, hogy az előző napi hiba *előjele* nem befolyásolja a mai hibát; a modellből mindössze annyi következik, hogy nagy változásokat nagy változások fognak követni („tömörül a volatilitás”). A feltétel nélküli variancia azonban továbbra is állandó marad:

$$Var(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \tag{5}$$

A fent leírt modelleket **ARCH modelleknek** nevezzük. Az elnevezés onnan származik, hogy a (3) és (4) összefüggések alapján az ε_t feltételes varianciájának a folyamatát elsőrendű autoregresszív folyamatként is felfoghatjuk:

$$E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \text{, azaz}$$
$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + w_t \tag{6}$$

ahol a w_t-k független eltérésváltozók. Az „ARCH-jelleg” tehát a variancia modellezésében nyilvánul meg, a várható érték (1)-ben szereplő modelljétől függetlenül – ez utóbbi bármilyen lehet, amíg a belőle kapott ε_t hibák autokorrelálatlanok.

Már ennél az egyszerű modellnél is látható, hogy a modell képes a volatilitás-tömörülés jelenségének visszaadására, továbbá a konstrukcióból adódóan a reziduumok négyzetei (a feltételes varianciák) is autokorrelálnak. Meggyőződhetünk arról is, hogy az eloszlás kurtózisa a normális eloszlás kurtózisánál nagyobb, a hozamok hisztogramja a normálisnál csúcsosabb eloszlást mutat. Mivel az ARCH modell viszonylag egyszerű matematikai eszközök alkalmazásával reprodukálja az empirikusan megfigyelt eloszlást, rendkívül el-

1 A η_t-t a gyakorlatban többnyire sztenderd normális eloszlásúnak vagy t-eloszlásúnak feltételezik.

terjedtté vált mind az irodalomban, mind a gyakorlati alkalmazások során.

AZ ÁLTALÁNOS ARCH(q) ALAK

Az ARCH modell általános alakjában a h_t feltételes varianciára megadott autoregresszív folyamat q késleltetésű, ezt láthatjuk a (9) egyenletben. A varianciafolyamat mellé bármilyen $f(x_t, \theta_t)$ várhatóérték-összefüggést felírhatunk a (7) egyenletben (amíg a kapott ε_t hibák autokorrelálatlanok). Általánosan az y_t várható értéke adott x_t változók θ paraméter szerinti függvénye:

$$y_t = f(x_t, \theta_t) + \varepsilon_t \quad (7)$$

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t} \quad (8)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 \quad (9)$$

Az η_t-k most is FAE, nulla várható értékű, egységnyi szórású valószínűségi változók. A (7)–(9) egyenletekkel felírt ARCH(q) modellből az (1)–(3) egyenletben ismertetett ARCH(1) modellhez hasonlóan levezethető, hogy az eltérésváltozó varianciája q-adrendű autoregresszív folyamatot követ:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + w_t \quad (10)$$

ahol a w_t-k független eltérésváltozók. Az ARCH(q) modellből az ARCH(1) felíráshoz hasonló tulajdonságok vezethetők le a modellezendő y_t változó eloszlását tekintve.

AZ ARCH MODELLEK BECSLÉSE

Az ARCH modellek építésének első lépése, hogy eldöntjük, mennyi késleltetést veszünk figyelembe a feltételes variancia felírásánál. Ehhez nyújt segítséget Engle ARCH LM-tesztje: azt vizsgáljuk, hogy a (10)-es modellben van-e ARCH hatás a q-adik tagig, azaz becsüljük a (10) egyenlet együtthatóit. A tesztstatisztika a becslés során kapott mintaelemszám és a determinációs együttható szorzata ($T \cdot R^2$), ami nagy mintákra q szabadságfokú khinégyzet-eloszlást követ. A teszt nullhipotézise, hogy a q-adik késleltetésig nincs ARCH hatás.

A késleltetés meghatározása után maximum likelihood módszerrel becsülhetjük a modell paramétereit. Ehhez valamilyen feltételezéssel kell élnünk az η_t eloszlására vonatkozóan. Gyakori feltevés, hogy η_t normális eloszlású – ez alapján fel tudjuk írni a maximalizálandó likelihood-függvényt:

$$f(y_t | x_t, \theta_t, \alpha_1, \ldots, \alpha_q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} e^{-\frac{(y_t - f(x_t, \theta_t))^2}{2h_t}} \quad (11)$$

A (11)-ben szereplő függvényt (vagy annak logaritmusát) a várhatóérték-egyenlet paraméterei (θ_t) és a variancia-egyenlet együtthatói (α_i) szerint maximalizálva megkapjuk az ARCH modell ökonometriai becslését. Az ARCH modellek annyira elterjedtek a gyakorlatban, hogy a becslési eljárás a legtöbb ökonometriai idősorelemzéshez tervezett szoftverben megtalálható.

TOVÁBBFEJLESZTÉSEK

Az empirikus alkalmazások azt bizonyították, hogy az ARCH modell jól illeszkedik az adatokhoz, ám ehhez sok késleltetést kell figyelembe venni (a q értéke nagy lesz), azaz egy adott időszaki volatilitásnak az előző időszakokbeli hozamok hosszú sorozatától kell függnie. Ezt a kellemetlenséget küszöbölte ki Tim Bollerslev (aki Engle tanítványa volt) a GARCH (általánosított, Generalized ARCH) modellel [2], ahol a mai volatilitás függ a tegnapi volatilitásértéktől is:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \dots + \beta_p h_{t-p} \tag{12}$$

A (12) egyenletben felírt modellt GARCH *(p, q)* modellnek nevezzük. Mivel itt a mai volatilitás függ a tegnapi hozamtól és volatilitástól, és a tegnanpi volatilitás szintén visszavezethető azt megelőző változókra, így implicite az összes korábbi időszaki sokk szerepet játszik a mai volatilitás meghatározásában, azonban a modellben csak néhány paramétert kell szerepeltetni a jó illeszkedéshez. A gyakorlatban a legtöbbet használt modell a GARCH (1, 1), ami rendszerint már megfelelően kiszűri az ARCH hatásokat.

Megszámolni is nehéz, hányféle ARCH modell született 1982, az ARCH modell megalkotása óta. Néhány példa ezekre: IGARCH, ARCH-M, EGARCH, NGARCH [3]. A számtalan modellváltozat indokolja, miért beszélünk általában „ARCH modellek"-ről.

AZ ARCH MODELLEK HASZNÁLATA AZ ALSÓÁGI KOCKÁZAT KISZÁMÍTÁSÁNÁL

Az alsóági kockázat azt a kockázatot ragadja meg, hogy a befektető portfóliójának értéke csökken. Ilyen alsóági kockázatokat jelenít meg például a VaR (kockáztatott érték) vagy a CVaR (feltételes kockáztatott érték), amelyek a portfólió egy későbbi időpontbeli értékének eloszlásából számíthatók: a VaR az eloszlás egy alacsony kvantilisét, a CVaR a VaR-nál kisebb portfólióértékek várható értékét adja meg [9].

Az egyszerű ARCH/GARCH modellből a normális eloszlásnál csúcsosabb, szimmetikus eloszlásokat kaptunk a hozamokra. Ha azonban az eloszlás jobbra ferde (balra hosszan elnyúló), az a kockázatunk szempontjából azt jelentheti, hogy az eszköz értéke sokkal nagyobb valószínűséggel esik, mint amit egy hasonló szórású normális eloszlás jelentene. Ha tehát olyan kockázati mérték szerint szeretnénk kiszámítani a portfóliónk kockázatát, amely az eloszlás alsó részére koncentrál (pl. a VaR), akkor a kockázatunk nagyobb, ha az eszközeink eloszlása ferde. A ferdeséget figyelembe vehetjük az ARCH modellkereten belül is, a TARCH (Threshold GARCH) elnevezésű modell révén [10]. Annyiban kell módosítanunk a korábbi elméletet, hogy az adott napi hozam volatilitása még jobban megnő, ha az előző napi hozam negatív volt: esés után tehát még nagyobb a hozamok szóródása, például:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 I_{\varepsilon_{t-1}<0} + \beta h_{t-1} \tag{13}$$

A (13) egyenletben a γ értékkel nő meg a késleltetett reziduum négyzetének α együtthatója, ha a reziduum az előző időszakban negatív volt.[2] Tehát ha a várható érték egyenletet úgy írjuk fel, hogy a hozamot kizárólag az ε_t-vel modellezzük, akkor a (13) egyenletben az ε_{t-1} négyzetének együtthatója nagyobb, ha a hozamok esnek. Ez azt jelenti, hogy negatív hozamok esetén (ha az árfolyam esik) nagyobb ingadozás várható a következő időszaki hozamban, mint pozitív hozamok (emelkedő piac) esetén. Az így felírt TARCH modell képes a hozameloszlások megfigyelt aszimmetriájának visszaadására is.[3]

Az alsóági kockázatok szempontjából több eszköz esetén figyelembe kell vennünk az eszközök együttmozgását is. A pénzügyi piacokon megfigyelték, hogy az árfolyamok esésekor a korrelációk sokkal nagyobbak, mint békés piaci periódusok alatt. Ebből következik, hogy a diverzifikációs hatás, amit több eszköz tartásával szerettünk volna elérni, megszűnik. A kockázatunk ezért nagyobb, mint amit a békés időszakbeli korrelációk alapján elképzeltünk.

A korrelációk többféleképpen vonhatók be az ARCH elméletbe. Megtehetjük, hogy külön modellezzük minden eszköz korrelációját, figyelve arra, hogy az eszközök árának együttes csökkenésekor nagyobb legyen a korreláció. Ez az aszimmetrikus dinamikus feltételes korrelációk *(asymmetric dynamic conditional correlations)* modellje [6]:

$$H_t = D_t R_t D_t \tag{14}$$

A D_t tartalmazza az eszközök időben változó volatilitását, míg az R_t a hozamok korrelációs mátrixa. Ez a modell annyiban különbözik Bollerslev több változóra felírt GARCH modelljétől [1], hogy az R_t korrelációs mátrix itt időben változó. A korrelációs mátrix elemeit az egyes eszközpárok esetén külön modellezhetjük, beépítve azt, hogy az eszközök árának együttes csökkenésekor (ha mindkét hozam negatív) nagyobb legyen a korreláció.

Másik lehetőség, hogy az eszközök együttmozgásának teljes rendszerét (a kovariancia-mátrixot) írjuk le: a hozamok kovariancia-mátrixa néhány *f* faktor függvénye lesz *(factor ARCH)* [7]. Tekintsük például az alábbi modellt az r_t hozamokra:

$$r_t = Bf_t + \varepsilon_t \tag{15}$$

$$Var_{t-1}(f_t) = \Omega_t \tag{16}$$

$$Var_{t-1}(\varepsilon_t) = D_t \tag{17}$$

amiből (a faktorok és az eltérésváltozók korrelálatlanságát feltételezve):

2 Az $I_{\varepsilon_{t-1}<0}$ olyan indikátorváltozó, amelynek értéke 1, ha ε_{t-1} negatív és 0, ha pozitív.

3 Az aszimmetrikus ARCH modellek egy további empirikus jelenség, az ún. *tőkeáttétel-hatás* visszaadására is képesek. Megfigyelték ugyanis, hogy a részvényárfolyam és az árfolyam volatilitása negatívan korrelál – hagyományosan ezt azzal magyarázták, hogy ha a vállalat részvényeinek árfolyama csökken, akkor nő a tőkeáttétel, így a részvény kockázatosabbá válik. A vizsgálatok azonban azt mutatták, hogy a volatilitás jobban nő, mint amit ez a magyarázat indokol. A „hiányzó" volatilitás azonban jól modellezhető aszimmetrikus ARCH modellekkel.

$$Var_{t-1}(r_t) = B\Omega_t B + D_t \qquad (18)$$

A hozamokat mozgató faktorok határozzák meg tehát a hozamok volatilitását és a korrelációkat. Ilyen modellt nagyon könnyen el tudunk képzelni:

$$\sigma_i^2 = \beta_i \sigma_m^2 + \sigma_e^2 \qquad (19)$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2 \qquad (20)$$

a CAPM esetén a hozam σ_i^2 szórásnégyzete megegyezik a piaci hozam σ_M^2 szórásnégyzetének konstansszorosa (ez a konstans a béta négyzete) és a σ_e^2 egyedi kockázat összegével (19). Az eszközök közötti σ_{ij} kovarianciák arányosak a piac szórásnégyzetével (20). Egyetlen faktor mozgásával (ami itt a piaci hozam) le tudtuk írni a hozamok kovariancia-mátrixát.

További kérdés, hogy miként állítsuk össze a portfóliónkat, ha változnak a korrelációk. Vajon a hosszú távú volatilitással és korrelációval számoljunk-e vagy az éppen aktuális (feltételes) értékekkel? Az előbbi stratégiával túl magas súlyt állapíthatunk meg azoknak az eszközöknek, amelyeknek éppen alacsony a szórásuk, míg az utóbbi esetén állandóan módosítanunk kell a portfóliónkat. Engle [5] javaslata, hogy az előbbi módszer dinamikus változatát kövessük: alacsonyabb volatilitás esetén kevesebbet fektessünk be annál, mint amit a szórás sugall, de időnként vizsgáljuk felül a portfóliónkat.

ZÁRSZÓ

A fenti kérdésekről: az ARCH alapmodellről, az empirikus eredményekről, a továbbfejlesztésekről és az alsóági kockázatokhoz kapcsolódó közelmúltban született eredményekről beszélt Robert Engle a Collegium Budapest vendégeként 2005. március 23-án. A tervek szerint a 2003. évi közgazdasági Nobel-díjas kutató előadásához kapcsolódó tanulmányt hamarosan olvashatják a Hitelintézeti Szemlében.

IRODALOM

[1] BOLLERSLEV, T. [1990]: Modelling the Coherence in Short-run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model. *Review of Economics and Statistics,* 72: 498–505. o.

[2] BOLLERSLEV, T. [1986]: Generalited Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics,* 31: 307–327. o.

[3] DARVAS ZS. [2004]: Bevezetés az idősorelemzés fogalmaiba. Kézirat.

[4] ENGLE, R. F. [2003]: Risk and Volatility: Econometric Models and Financial Practice. Nobel-díj előadás.

[5] ENGLE, R. F.–COLACITO R. [2003]: Testing and Valuing Dynamic Correlations for Asset Allocation. Kézirat.

[6] ENGLE, R. F. [2002]: Dynamic Conditional Correlation – A Simple Class of Multivariate GARCH Models. Megjelenés alatt. *Journal of Business and Economic Statistics.*

[7] ENGLE, R. F.–NG, V.–ROTHSCHILD, M. [1988]: Asset Pricing with a Factor ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treassury Bills. NBER Technical Paper Series.

[8] ENGLE, R. F. [1982]: Autoregressive Conditional Heteroskedasticity With Estimates of the Variance of U.K. Inflation. *Econometrica* 50: 987–1008. o.

[9] RAU-BREDOW, H. [2004]: Value-at-Risk, Expected Shortfall and Marginal Risk Contribution. In: SZEGÖ, G.: *Risk Measures for the 21st Century.* John Wiley & Sons.

[10] ZAKOIAN, J. [1994]: Threshold heteroskedastic functions. *Journal of Economic Dynamics and Control* 18: 931–955. o.